

2021 届高三年级苏州八校联盟第三次适应性检测

数 学 试 卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$ ， $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$ ，则 $M \cup N =$

- A. $\{x | -4 < x < 3\}$ B. $\{x | -4 < x < -2\}$ C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$

【答案】A

【解析】因为 $N = (-2, 3)$ ，所以 $M \cup N = (-4, 3)$. 故选 A

2. 复数 $z \in \mathbb{C}$ ，在复平面内 z 对应的点 Z ，满足 $1 \leq \left| z - \frac{1}{1+i} \right| \leq 2$ ，则点 Z 所在区域的面积

- A. π B. 2π C. 3π D. 4π

【答案】C

【解析】设 $z = a - bi$ ，则 $\left| z - \frac{1}{1+i} \right| = \left| a + \frac{1}{2} + (b - \frac{1}{2})i \right| = \sqrt{(a + \frac{1}{2})^2 + (b - \frac{1}{2})^2} \in [1, 2]$. 由数形结

合可知 $S = \pi(2^2 - 1^2) = 3\pi$. 故选 C

3. 《九章算术》是世界上最古老的数学著作之一，书中有如下问题：“今有金箠，长五尺，斩本一尺，重十斤，斩末一尺，重四斤，问次一尺各重几何？”意思是：“现有一根金杖，长 5 尺，一头粗，一头细，在粗的一端截下 1 尺，重 10 斤；在细的一端截下 1 尺，重 4 斤，问依次每一尺各重多少斤？”假设金杖由粗到细是均匀变化的，则截去粗端 2 尺后，金杖剩余部分的重量为

- A. 15.5 斤 B. 16.5 斤 C. 17.5 斤 D. 18.5 斤

【答案】B

【解析】错题

4. 设三点 A, B, C 不共线, 则“向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 夹角是钝角”是“ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| < |\overrightarrow{BC}|$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】 因为 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| < |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ 两边平方可得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$, 所以为充分必要条件. 故选 C

5. 设 $x = \log_{0.4} 0.5$, $y = \log_{1.5} 0.5$, 则

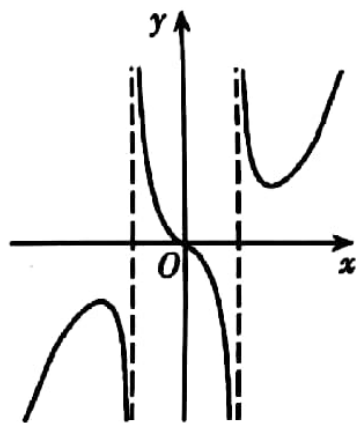
- A. $xy < x + y < 0$ B. $x + y < xy < 0$
C. $x + y < 0 < xy$ D. $xy < 0 < x + y$

【答案】A

【解析】 因为 $x = \log_{0.4} 0.5 > 0$, $y = \log_{1.5} 0.5 < 0$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\lg 0.5} (\lg 0.4 + \lg 1.5) > 0$, 所以 $x < -y$, $xy < x + y < 0$. 故选 A

6. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像如右图所示, 则此函数可能是

- A. $f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{x^2 + |x| - 2}$ B. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + |x| - 2}$
C. $f(x) = \frac{x^3 + x}{e^{|x|-1} - e^{1-|x|}}$ D. $f(x) = \frac{x^3 - x}{e^{|x|-1} - e^{1-|x|}}$



(第 6 题图)

【答案】B

【解析】 由图像易知 $f(x)$ 在定义域里 $x \neq 1$, 排除 CD; 当 $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, 排除 AC. 故选 B

7. 若数列 $\{F_n\}$ 满足 $F_1=1$, $F_2=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ ($n \geq 3$), 则 $\{F_n\}$ 称为斐波那契数列, 它是由中世纪意大利数学家斐波那契最先发现. 它有很多美妙的特征, 如当 $n \geq 2$ 时, 前 n 项

之和等于第 $n+2$ 项减去第 2 项；随着 n 的增大，相邻两项之比越来越接近 0.618 等等. 若第 30 项是 832040，请估计这个数列的前 30 项之和最接近

(备注： $0.618^2 \approx 0.38$ ， $1.618^2 \approx 2.61$)

- A. 31 万 B. 51 万 C. 217 万 D. 317 万

【答案】C

【解析】 因为 $a_{30} = 832040$ ，所以 $a_{32} \approx \frac{a_{30}}{(0.618)^2} = \frac{832040}{0.38} \approx 2190000$. 故选 C

8. 平面直角坐标系 xOy 中，若点的横、纵坐标均为整数，则称该点为整点. 已知点

$A(-\sqrt{6}, 0)$, $B(\sqrt{6}, 0)$ ，若整点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| \leq 4$ ，则点 P 的个数为

- A. 10 B. 11 C. 14 D. 15

【答案】D

【解析】 设 $P(x, y)$ ，则 $\overrightarrow{PA} = (-\sqrt{6} - x, -y)$, $\overrightarrow{PB} = (\sqrt{6} - x, -y)$ ，

则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2 + y^2 - 6$ ， $|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{(x + \sqrt{6})^2 + y^2}$, $|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{(x - \sqrt{6})^2 + y^2}$ ，

$|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + 6)^2 - 24x^2}$ ，

若 $x^2 + y^2 = 0$ ，即 $x = y = 0$ ，即 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| = -6 + \sqrt{12}$ ，此时一个点满足；

若 $x^2 + y^2 = 1$ ，即 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| = -5 + \sqrt{49 - 24x^2} \leq 7 - 5 = 2 < 4$ ，此时四个点满

足；若 $x^2 + y^2 = 2$ ，即 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| = -4 + \sqrt{64 - 24x^2} \leq 8 - 4 = 4$ ，此时四个点

满足；若 $x^2 + y^2 = 4$ ，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| = -2 + \sqrt{100 - 24x^2} \leq 4$ ，仅有 $(\pm 2, 0)$ 两

个点满足；若 $x^2 + y^2 = 5$ ，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| = -1 + \sqrt{121 - 24x^2} \leq 4$ ，仅有 $(\pm 2, \pm 1)$

四个点满足；若 $x^2 + y^2 \geq 8$ ，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| > 4$ ，无满足题意的点；

综上，共有 15 个. 故选 D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = (\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2$ ，则

A. $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上递增

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称

C. $f(x)$ 最小正周期为 π

D. $f(x)$ 的值域为 $[0, 4]$

【答案】ACD

【解析】 $f(x) = (\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2 = 4 \sin^2(x + \frac{\pi}{3}) = 2 - 2 \cos(2x + \frac{2\pi}{3}) \geq 0$ ，易知 B 错，ACD 对。故选 ACD

10. 某学校组织知识竞赛，每班组成四人小组参加比赛，比赛采用抢答形式，答对则得 5 分，否则得 0 分。高三（10）班由甲、乙、丙、丁四人组队参赛。最后统计结果为：甲、乙、丙、丁四人得分恰好由高到低排列，且均不相同；甲答对题个数的 2 倍小于丁答对题个数的 3 倍，则

A. 甲至少答对了 11 道题

B. 乙至少答对了 9 道题

C. 丁至少答对了 8 道题

D. 高三（10）班至少获得了 170 分

【答案】BD

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，凸四边形 $ABCD$ 的 4 个顶点均在抛物线 $E: y^2 = 2x$ 上，则

A. 四边形 $ABCD$ 不可能为平行四边形

B. 存在四边形 $ABCD$ ，满足 $\angle A = \angle C$

C. 若 AB 过抛物线 E 的焦点 F ，则直线 OA, OB 斜率之积恒为 -2

D. 若 $\triangle OAC$ 为正三角形，则该三角形的面积为 $12\sqrt{3}$

【答案】ABD

【解析】易知任意两条平行弦的弦长不相等，即 A 正确；

存在以 BD 为直径的圆与抛物线交于位于 BD 两侧的两点 A, C ，即 B 正确；

设 $l_{AB}: x = my + \frac{1}{2}$ ，代入抛物线，可得 $y^2 - 2my - 1 = 0$ ，则 $y_A \cdot y_B = -1$ ，

所以 $k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_A}{\frac{y_A^2}{2}} \cdot \frac{y_B}{\frac{y_B^2}{2}} = \frac{4}{y_A \cdot y_B} = -4$ ，即 C 错误；

易知 A, C 横坐标相等，设 $A(2t^2, 2t), C(2t^2 - 2t)$ ，则 $2\sqrt{3}t = 2t^2$ ，解得 $t = \sqrt{3}$ ，

边长 $4t = 4\sqrt{3}$ ，面积 $S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$ ，即 D 正确。

12. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ （底面为平行四边形的四棱柱）中， $AB=AD=AA_1=2$ ，

$\angle A_1AB = \angle DAB = \angle A_1AD = 60^\circ$ ，则

A. 线段 AC_1 的长度为 $2\sqrt{6}$

B. 异面直线 BD_1 、 B_1C 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$

C. 对角面 BB_1D_1D 的面积为 $4\sqrt{3}$

D. 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $4\sqrt{2}$

【答案】AD

【解析】 因为 $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ ，

所以 $|\overrightarrow{AC_1}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})^2 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 \times 2^2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 24$ ，

所以 $AC_1 = 2\sqrt{6}$ ，即 A 正确；

因为 $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$ ，

所以 $\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{B_1C} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1})$ ，

即 $\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0$ ， $\overrightarrow{BD_1} \perp \overrightarrow{B_1C}$ ，B 错误；

易知对角面 BB_1D_1D 是边长为 2 的正方形，面积 $S = 2^2 = 4$ ，即 C 错误；

因为三棱锥 $A_1 - ABD$ 为正四面体，可知高 $h = 2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ，

所以 $V = 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{2}$ ，即 D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 以坐标轴为对称轴的等轴双曲线 C 经过点 $A(-3, 1)$ ，则 C 的标准方程为 ▲ .

【答案】 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

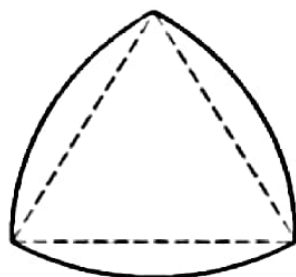
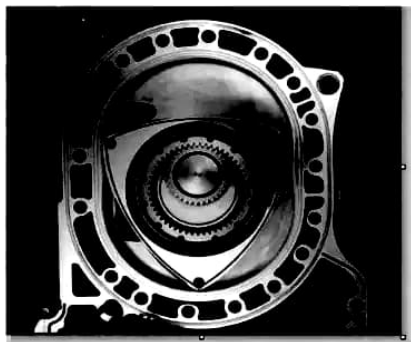
【解析】 设等轴双曲线 C 为 $m(x^2 - y^2) = 1$ ，带入 $A(-3, 1)$ 的 $m = \frac{1}{8}$ ，所以得 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

14. $(x + \frac{y^2}{x})^5 (x + y)^5$ 展开式中， $x^8 y^2$ 的系数为 ▲ .

【答案】 15

【解析】 要得 $x^8 y^2$ 则，从 $(x + \frac{y^2}{x})^5$ 选 1 个 y^2 或从 $(x + y)^5$ 选 2 个 y ，即 $C_5^1 + C_5^2 = 15$.

15. “莱洛三角形”是机械学家莱洛研究发现的一种曲边三角形，转子发动机的设计就是利用了莱洛三角形. 转子引擎只需转一周，各转子便有一次进气、压缩、点火与排气过程，相当于往复式引擎运转两周，因此具有小排气量就能成就高动力输出的优点. 另外，由于转子引擎的轴向运转特性，它不需要精密的曲轴平衡就可以达到非常高的运转转速. “莱洛三角形”是分别以正三角形的顶点为圆心，以其边长为半径作圆弧，由这三段圆弧组成的曲边三角形(如下图所示). 设“莱洛三角形”曲边上两点之间的最大距离为 2，则该“莱洛三角形”的面积为 ▲ .



(第 15 题图)

【答案】 $2\pi - 2\sqrt{3}$

【解析】 易知每段圆弧所在圆的半径为 2，

则面积 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} + 3 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2\pi - 2\sqrt{3}.$

16. 已知函数 $f(x) = (2x^2 - 4x + 3)(e^{x-1} - e^{1-x}) - 2x + 1$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m = \underline{\hspace{1cm} \blacktriangle \hspace{1cm}}.$

【答案】-2

【解析】 设 $g(x) = f(x+1) = (2x^2 + 1)\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) - 2x - 1, \quad x \in [-1, 1],$

则易知 $g(x)$ 关于 $(0, -1)$ 对称, 所以 $M + m = -2.$

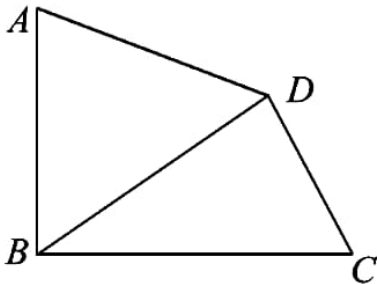
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答时应写出说明、证明过程或演算步骤．

17. （本小题满分 10 分）

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $BC=1, \angle ABC=90^{\circ}, \angle BCD=60^{\circ}, \angle BAD=75^{\circ}.$

(1) 若 $\angle CBD=30^{\circ}$ ，求三角形 ABD 的面积；

(2) 若 $AD=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ，求 $\angle CBD$ 的大小.



(第 17 题图)

【解析】(1) 在 $\triangle BCD$ 中，由 $\angle CBD=30^{\circ}, \angle BCD=60^{\circ},$

可得 $\angle BDC=90^{\circ}, BD=\frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\sin 75^{\circ} = \sin(45^{\circ} + 30^{\circ}) = \sin 45^{\circ} \cos 30^{\circ} + \cos 45^{\circ} \sin 30^{\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理知 $\frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{BD}{\sin \angle A},$ 可得 $AD = \frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2} BD \cdot AD \cdot \sin \angle ADB = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \sin 45^\circ = \frac{9-3\sqrt{3}}{16} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } AD = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, BC=1, \angle BCD = 60^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle ABD、\triangle BCD \text{ 中，由正弦定理知，} \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\sin \angle ABD} = \frac{BD}{\sin 75^\circ}, \frac{1}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin 60^\circ} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \angle ABC = 90^\circ, \text{ 所以 } \sin \angle ABD = \cos \angle CBD$$

$$\text{从而有 } BD \cdot \cos \angle CBD = \frac{1}{2}, BD \cdot \sin \angle BDC = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{两式相除可得 } \sin \angle BDC = \sqrt{3} \cos \angle CBD \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \sin \angle BDC = \sin(180^\circ - 60^\circ - \angle CBD) = \sin(60^\circ + \angle CBD)$$

$$= \sin 60^\circ \cos \angle CBD + \cos 60^\circ \sin \angle CBD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle CBD + \frac{1}{2} \sin \angle CBD$$

$$\text{因此有 } \tan \angle CBD = \sqrt{3}, \text{ 由 } 0^\circ < \angle CBD < 180^\circ \text{ 可得 } \angle CBD = 60^\circ \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(延长 BA, CD 交与点 E, 在三角形 EAD 中计算同样给分)

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且各项均为正数, $a_1 = 2$, $a_2 + a_3$ 是 a_3 与 a_4 的等差中项. 记

正项数列 $\{b_n\}$ 前 n 项之积为 T_n , $b_1 = 1$, $T_n^2 = a_{n(n-1)} (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

$$(2) \text{ 证明: } \sum_{i=1}^n \frac{a_i - 1}{(2b_i - i)(2b_{i+1} - i - 1)} \geq \frac{1}{2} (n \in N_+).$$

【解析】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由各项为正, 故 $q > 0$.

由于 $a_2 + a_3$ 是 a_3 与 a_4 的等差中项, 可得 $2(a_2 + a_3) = a_3 + a_4$,

又 $a_1=2$, 所以 $2(2q + 2q^2) = 2q^2 + 2q^3$, 因此 $q=2$,

从而 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^n$, 即 $a_n=2^n$ 2 分

由 $b_n>0, b_1=1, T_2^2 = b_1 b_2 = 2, b_2 = 2$.

当 $n \geq 3$ 时, $T_{n-1}^2 = a_{(n-2)(n-1)}$, 得 $b_n^2 = \frac{T_n^2}{T_{n-1}^2} = \frac{a_{n(n-1)}}{a_{(n-1)(n-2)}} = 2^{2(n-1)}$, 故 $b_n = 2^{n-1} (n \geq 3)$,

$b_1=1, b_2=2$ 均符合上式, 所以 $b_n = 2^{n-1}$ 4 分

$$(2) \frac{a_i - 1}{(2b_i - i)(2b_{i+1} - i - 1)} = \frac{2^i - 1}{(2^i - i)(2^{i+1} - i - 1)} = \frac{1}{2^i - i} - \frac{1}{2^{i+1} - (i+1)}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

因此有:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{a_i - 1}{(b_i - i)(b_{i+1} - i - 1)} &= \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^2-2}\right) + \left(\frac{1}{2^2-2} - \frac{1}{2^3-3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n-n} - \frac{1}{2^{n+1}-(n+1)}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}-(n+1)} \end{aligned} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

要证不等式成立, 即证 $2^{n+1} - (n+1) \geq 2 (n \in N_+)$

由 $2^{n+2} - (n+2) - [2^{n+1} - (n+1)] = 4 \times 2^n - 1 > 0$ 可得数列 $\{2^{n+1} - (n+1)\}$ 递增, ... 10 分

所以 $2^{n+1} - (n+1) \geq 2^{1+1} - (1+1) = 2$.

$$\text{由此 } \sum_{i=1}^n \frac{a_i - 1}{(2b_i - i)(2b_{i+1} - i - 1)} \geq \frac{1}{2} (n \in N_+) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

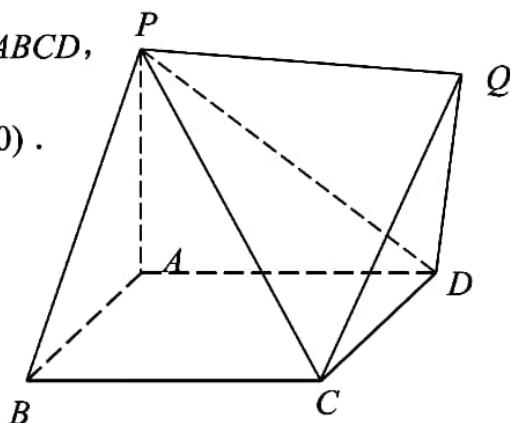
(亦可运用二项式定理证明)

19. (本小题满分 12 分)

如图, 多面体 $PQABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=PA=2$, $\angle ABC=60^\circ$, $QC=QD=2\sqrt{2}$, $PQ=a$ ($a>0$).

(1) 设点 F 为棱 CD 的中点, 求证: 对任意的正数 a , 四边形 $PQFA$ 为平面四边形;

(2) 当 $a=\sqrt{14}$ 时, 求直线 PQ 与平面 PBC 所成角的正弦值.



(第 19 题图)

【解析】(1) 方法 1: 设 Q 在平面内的射影为 E , 由 $QC=QD$ 可得

$EC=ED$,

所以点 E 在 CD 的垂直平分线上

..... 2 分

由 $ABCD$ 是菱形, 且 $\angle ABC=60^\circ$, 故直线 AE 与 CD 的交点即为 CD 的中点 F 4 分

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $QE \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \parallel QE$,

从而 PA, QE 共面, 因此 PQ, FA 共面, 所以 $PQFA$ 为平面四边形..... 6 分

方法 2: 证明 $CD \perp$ 平面 AFQ ,

..... 2 分

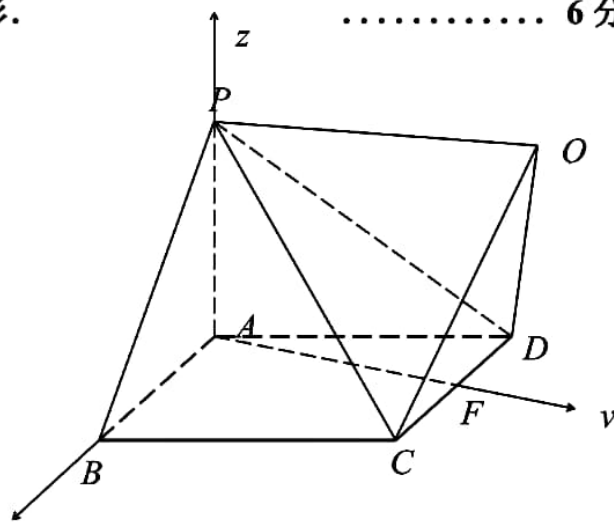
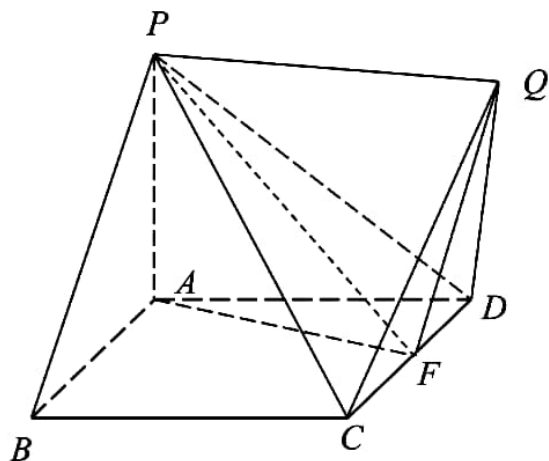
再证明 $CD \perp$ 平面 PAF

..... 4 分

由 AFQ 与平面 PAF 均过点 A 可得平面 AFQ 与平面 PAF 重合.

即 P, Q, F, A 共面, 所以 $PQFA$ 为平面四边形.

..... 6 分



(2) 分别以 AB, AF, AP 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐

标系, 则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(1,\sqrt{3},0)$, $F(0,\sqrt{3},0)$, $P(0,0,2)$

当 $a=\sqrt{14}$ 时, 由 $PF=\sqrt{7}, QF=\sqrt{7}$ 可得 $PF^2+QF^2=PQ^2$,

所以 Q 的坐标为 $(0, 2 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$, 8 分

可求平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$ 10 分

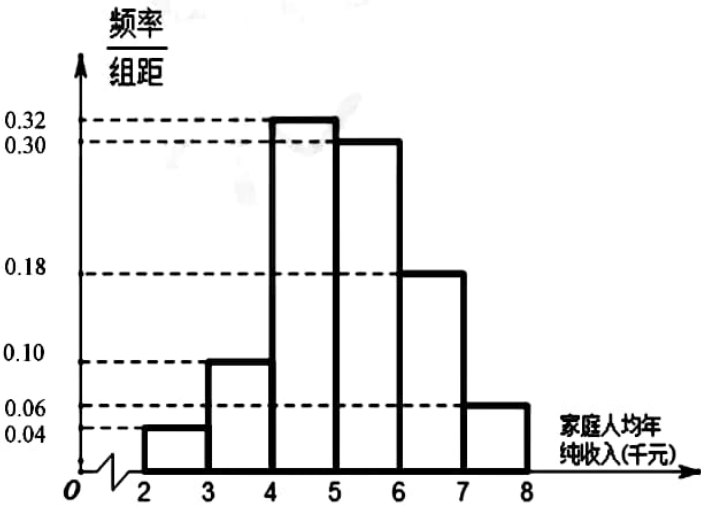
设直线 PQ 与平面 PBC 所成角为 θ ,

则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{PQ} \rangle \right| = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{6}}{14},$

从而直线 PQ 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{5\sqrt{2} - \sqrt{6}}{14}$ 12 分

20. (本小题满分 12 分)

某贫困地区截至 2016 年底，按照农村家庭人均年纯收入 8000 元的小康标准，该地区仅剩部分家庭尚未实现小康．现从这些尚未实现小康的家庭中随机抽取 50 户，得到这 50 户 2016 年的家庭人均年纯收入的频率分布直方图．



(第 20 题图)

- (1) 将家庭人均年纯收入不足 5000 元的家庭称为“特困户”，若从这 50 户中再取出 10 户调查致贫原因，求这 10 户中含有“特困户”的户数 X 的数学期望；
- (2) 假设 2017 年底该地区有 1000 户居民，其中 900 户为小康户，100 户为“特困户”，若每经过一年的脱贫工作后，“特困户”中有 90% 变为小康户，但小康户仍有 $t\%$ ($0 < t < 10$) 变为“特困户”，假设该地区居民户数保持不变，记经过 n 年脱贫工

作后该地区小康户数为 a_n .

(i) 求 a_1 并写出 a_{n+1} 与 a_n 的关系式;

(ii) 要使经 2 年脱贫工作后该地区小康户数至少有 950 户, 求最大的正整数 t 的值.

【解析】(1) 由频率分布直方图可知, 家庭人均年收入在 $[2000, 3000)$ 元、 $[3000, 4000)$ 元、

$[4000, 5000)$ 元、 $[5000, 6000)$ 元、 $[6000, 7000)$ 元、 $[7000, 8000)$ 元的家庭数依次

为: $0.04 \times 50 = 2$ 户; $0.10 \times 50 = 5$ 户; $0.32 \times 50 = 16$ 户; $0.30 \times 50 = 15$ 户;

$0.18 \times 50 = 9$ 户; $0.06 \times 50 = 3$ 户; 共计 50 户,

其中家庭人均年收入不足 5000 元的特困户有: $2 + 5 + 16 = 23$ 户.2 分

若从这 50 户中再取出 10 户调查致贫原因,

这 10 户中含有“特困户”的户数 X 服从 $H(10, 23, 50)$ 的超几何分布,

因为当 $X \sim H(n, M, N)$ 时, $E(X) = n \times \frac{M}{N}$,

所以 $E(X) = 10 \times \frac{23}{50} = 4.6$ 户;4 分

(2) 因为每经过一年的脱贫工作后, “特困户”中有 90% 变为小康户, 但小康户仍有

$t\%$ ($0 < t < 10$) 变为“特困户”, 所以有

(i) $a_1 = \left(1 - \frac{t}{100}\right) 900 + \frac{90}{100} \times 100 = 990 - 9t$ 5 分

$a_{n+1} = \left(1 - \frac{t}{100}\right) a_n + \frac{90}{100} (1000 - a_n)$, 即 $a_{n+1} = \frac{10-t}{100} a_n + 900$ ($0 < t < 10$) ...8 分

(ii) $a_2 = \frac{10-t}{100} a_1 + 900 = \frac{10-t}{100} (990 - 9t) + 900$,

由 $a_2 \geq 950$ 可得 $(990 - 9t)(10 - t) \geq 5000$,10 分

记函数 $f(t) = (990 - 9t)(10 - t)$, 其中 $0 < t < 10$,

因函数 $f(t) = (990 - 9t)(10 - t)$ 是开口向上的二次函数，且其对称轴为 $t = 60$ ，

则函数 $f(t) = (990 - 9t)(10 - t)$ 在 $(0, 10)$ 上单调递减，

又 $f(4) = 5724$ ， $f(5) = 4725$ ，故最大的正整数 $t = 4$ 。……………12 分

21. (本小题满分 12 分)

已知圆 $E: (x+1)^2 + y^2 = 8$ ，点 $F(m, 0) (m > 0)$ ， P 是圆 E 上一点，线段 PF 的垂直平分线 l 与直线 EP 相交于点 Q 。

(1) 若 $m=2$ ，点 P 在圆 E 上运动时，点 Q 的轨迹是什么？说明理由；

(2) 若 $m=1$ ，点 P 在圆 E 上运动时，点 Q 的轨迹记为曲线 C 。过 E 点作两条互相垂直的直线 l_1 、 l_2 ， l_1 与曲线 C 交于两点 A 、 B ， l_2 与曲线 C 交于两点 C 、 D ， M 为线段 AB 的中点， N 为线段 CD 的中点。试问，直线 MN 是否过定点？若过定点，并求出该定点的坐标，若不过定点，请说明理由。

【解析】(1) $m=2$ 时，点 F 在圆 E 外， $|EF| > 2\sqrt{2}$ 。

由 Q 是线段 PF 的垂直平分线 l 与直线 EP 的交点， $\therefore |QP| = |QF|$ ，

又点 Q 在线段 PE 外，故有 $||QP| - |QE|| = 2\sqrt{2}$ ，于是有 $||QF| - |QE|| = 2\sqrt{2}$ ，

又由 $|EF| > 2\sqrt{2}$ ，即 $||QE| - |QF|| < |EF|$ ，

由双曲线定义知点 Q 的轨迹是以 E ， F 为焦点的双曲线。……3 分

(不说明 $||QE| - |QF|| < |EF|$ 扣 1 分)

(2) 当 $m=1$ 时， $E(-1, 0)$ ， $F(1, 0)$ ，同 (1) 可得 $|QF| + |QE| = 2\sqrt{2} > |EF|$ ，

故 Q 点的轨迹 C 是以 E ， F 为左右焦点的椭圆，

$\therefore c=1$ ，又 $a^2 - b^2 = c^2$ ， $|QE| + |QF| = 2\sqrt{2} = 2a$ ， $\therefore a^2 = 2$ ， $b^2 = 1$ ，

故曲线 C 方程: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

.....5 分

设 $l_1: x = ty - 1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$,

① 当 $t = 0$ 时, 直线 MN 与 x 轴重合,

.....6 分

② $t \neq 0$ 由 $\begin{cases} x = ty - 1, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2 + 2)y^2 - 2ty - 1 = 0$,

因点 E 在椭圆内, 所以有 $\Delta > 0$ 恒成立, 且 $y_1 + y_2 = \frac{2t}{t^2 + 2}$, $\therefore y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{t}{t^2 + 2}$,

由点 $M(x_0, y_0)$ 在直线 $l_1: x = ty - 1$ 上, $\therefore x_0 = ty_0 - 1 = -\frac{2}{t^2 + 2}$ 即 $M\left(\frac{-2}{t^2 + 2}, \frac{t}{t^2 + 2}\right)$

因直线 l_1, l_2 相互垂直, 故可设 $l_1: x = -\frac{1}{t}y - 1$, 同理可得 $N\left(\frac{-2t^2}{2t^2 + 1}, \frac{-t}{2t^2 + 1}\right)$...8 分

(i) 若 $\frac{-2}{t^2 + 2} \neq \frac{-2t^2}{2t^2 + 1}$, 则有 $t^2 \neq 1$,

$$\text{此时 } k_{MN} = \frac{\frac{t}{t^2 + 2} + \frac{t}{2t^2 + 1}}{\frac{-2}{t^2 + 2} + \frac{2t^2}{2t^2 + 1}} = \frac{3t(t^2 + 1)}{2(t^4 - 1)} = \frac{3t}{2(t^2 - 1)},$$

直线 MN 方程: 则有 $y - \frac{t}{t^2 + 2} = \frac{3t}{2(t^2 - 1)}\left(x + \frac{2}{t^2 + 2}\right)$, 化简整理得:

$$y = \frac{3t}{2(t^2 - 1)}\left(x + \frac{2}{3}\right) \text{ 此时直线 MN 恒过点 } \left(-\frac{2}{3}, 0\right). \quad \text{.....10 分}$$

(ii) 若 $\frac{-2}{t^2 + 2} = \frac{-2t^2}{2t^2 + 1}$, 则有 $t^2 = 1$, 此时 $M\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $N\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$,

或 $M\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $N\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 此时直线 MN 过点 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$;

综上可知直线 MN 恒过定点 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

.....12 分

其它解法根据情况酌情给分.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$.

(1) 设函数 $h(x) = f(x) - (x-1) \cdot g(x)$, 当 $x \in [-\pi, 0]$ 时, 求函数 $h(x)$ 零点的个数

(2) 求证: $g(x) \cdot g'(x) + 1 < x \cdot f(x) - \ln x$.

【解析】(1) 由题意可得: $h(x) = e^x - (x-1) \cdot \sin x$,

$\therefore h'(x) = e^x - \sin x - (x-1) \cdot \cos x$, $h''(x) = e^x - 2\cos x + (x-1) \cdot \sin x$,

1° 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 时, $e^x > 0$, $\sin x \leq 0$, $(x-1) \cdot \cos x \leq 0$, $\therefore h'(x) > 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 上单调递增,2 分

2° 当 $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $e^x > 0$, $\cos x \leq 0$, $(x-1) \cdot \sin x \geq 0$

$\therefore h''(x) > 0$, $\therefore h'(x)$ 在 $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

又 $h'(-\pi) = e^{-\pi} - \pi - 1 < 0$, $h'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 > 0$,

且 $h'(x)$ 的图象在 $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ 内连续不断,

$\therefore \exists x_0 \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $h'(x_0) = 0$,

且当 $x \in [-\pi, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, -\frac{\pi}{2}]$ 时, $h'(x) > 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $[-\pi, x_0)$ 内单调递减, 在 $(x_0, -\frac{\pi}{2}]$ 内单调递增,

综合 1° 2° 可知: $h(x)$ 在 $[-\pi, x_0)$ 内单调递减, 在 $(x_0, 0]$ 内单调递增,4 分

$$\text{又 } h(-\pi) = e^{-\pi} > 0, \quad h(x_0) < h(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} - 1 < 0, \quad h(0) = 1 > 0,$$

且 $h(x)$ 的图象在 $[-\pi, 0]$ 内连续不断,

$$\therefore \exists x_1 \in (-\pi, x_0), \exists x_2 \in (x_0, 0) \text{ 使得 } h(x_1) = h(x_2) = 0,$$

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $[-\pi, 0]$ 内零点的个数是 2.6 分

(2) 证明: 要证明 $g(x) \cdot g'(x) + 1 < x \cdot f(x) - \ln x$,

$$\text{即证: } \sin x \cdot \cos x + 1 - x \cdot e^x + \ln x < 0$$

$$\text{即证: } \frac{\sin 2x}{2} + 1 - x \cdot e^x + \ln x < 0, (*)$$

$$\text{设 } F(x) = \sin 2x - 2x, \text{ 则 } F'(x) = 2 \cos 2x - 2 = 2(\cos 2x - 1) \leq 0$$

$$\therefore F(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 内单调递减, } \therefore F(x) < F(0) = 0, \therefore \sin 2x < 2x$$

所以要证 (*) 成立, 只需证 $x + 1 - x \cdot e^x + \ln x \leq 0$ 8 分

$$(\text{法一}) \text{ 设 } G(x) = x + 1 - x \cdot e^x + \ln x, \text{ 则 } G'(x) = 1 - (x + 1) \cdot e^x + \frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x} (1 - xe^x)$$

$$\text{又设 } k(x) = 1 - xe^x, \therefore k'(x) = -(x + 1)e^x < 0, \therefore k(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 内单调递减,}$$

$$\text{又 } k(0) = 1 > 0, k(1) = 1 - e < 0$$

$$\therefore \exists t \in (0, 1) \text{ 使得 } k(t) = 0, \text{ 即 } te^t = 1, \ln t + t = 0 \text{10 分}$$

$$\text{当 } x \in (0, t), G'(x) > 0, G(x) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{当 } x \in (t, +\infty), G'(x) < 0, G(x) \text{ 单调递减,}$$

$$\text{所以, } G(x) \leq G(t) = t + 1 - t \cdot e^t + \ln t = 0, \text{ 所以原命题得证.12 分}$$

$$(\text{法二}) \text{ 设 } H(x) = e^x - x - 1, \text{ 则 } H'(x) = e^x - 1$$

所以 $H(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 所以 $H(x) \geq H(0) = 0$,

$\therefore e^x \geq x + 1$ 10 分

$\therefore e^{x+\ln x} \geq x + \ln x + 1$, $\therefore xe^x \geq x + \ln x + 1$, 即证 $x + 1 - x \cdot e^x + \ln x \leq 0$ 成立

所以原命题得证.12 分